Inmersión de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

Ana Ofelia Negrete Fernández

16 de julio de 2021

1. Introducción

Se suele pensar al conjunto de los números enteros como aquél que está conformado por números positivos, números negativos y el cero:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

donde, observamos, $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$.

En esta sección demostraremos que, en efecto, como existe una función inyectiva

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \text{tal que} \qquad n &\mapsto [(n, 0)], \end{aligned}$$

entre los naturales y las clases $[(n, 0)] \in \mathbb{Z}$, podemos considerar que los naturales son subconjunto de los enteros. Más aún, las propiedades de suma y producto de naturales se respetan bajo la función, el neutro aditivo también es enviado al neutro aditivo, el neutro multiplicativo es enviado al neutro multiplicativo, y asimismo se respeta el orden ($n < m$ implica que $[(n, 0)] <^* [(m, 0)]$). Más aún, se puede pensar que los números negativos en $\mathbb{Z}$, $\{\ldots, -2, -1\}$ son otra copia de $\mathbb{N} \backslash \{0\}$ que también está metida en $\mathbb{Z}$, pues hay tantos "naturales" positivos en $\mathbb{Z}$, como enteros negativos en $\mathbb{Z}$.

En esta entrada de blog demostramos estas cosas.

2. Inmersión de los naturales en los enteros.

Lema 1. $\gamma(n) = [(n, 0)]$ es inyectiva.

Dem.- Sea $[(n, 0)] = [(m, 0)]$. Entonces $(n, 0) \sim (m, 0)$, por lo que $n + 0 = m + 0$. Como 0 es neutro aditivo en $\mathbb{N}$, entonces $n = m$.

$\square$

¿Será $\gamma(n) = [(n, 0)]$ suprayectiva?

No lo es. Para que sí lo fuera, tendría que ocurrir que $\gamma(n) = \mathbb{Z}$ (usando la definición de función suprayectiva). Sin embargo, $\gamma(n)$ está contenida propiamente en $\mathbb{Z}$. Es decir, hay enteros diferentes de $[(n, 0)]$, a saber, aquéllos en donde $[(a, b)] \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Aunque si modificáramos al codominio de γ por $\mathbb{Z} \restriction_{[(n,0)]}$, es decir, $\mathbb{Z}$ restringido a los enteros de la forma $[(n, 0)]$, entonces la función sí sería biyectiva, pues siempre podríamos elegir cualquier $[(n, 0)] \in \mathbb{Z} \restriction_{[(n,0)]}$ y decir que su preimagen es n.

Pero regresando a la función original, ahora veamos que, la suma y producto de dos números naturales se respetan en los enteros.

Lema 2. $\gamma(n + m) = \gamma(n) \ \widehat{+} \ \gamma(m) \qquad \forall \ n, m \in \mathbb{N}$.

Dem.- $\gamma(n + m) = [(n + m, 0)]$. Luego, $[(n + m, 0)] = [(n + m, 0 + 0)] = [(n, 0)] \ \widehat{+} \ [(m, 0)]$.

$\square$

Lema 3. $\gamma(n \cdot m) = \gamma(n) \star \gamma(m) \qquad \forall\ n, m \in \mathbb{N}$.

Dem.- $\gamma(n \cdot m) = [(n \cdot m, 0)] = [(n \cdot m + 0 \cdot 0, m \cdot 0 + 0 \cdot n)] = [(n, 0)] \star [(m, 0)] = \gamma(n) \star \gamma(m)$.

$\square$

Ahora veamos que el neutro aditivo en $\mathbb{N}$ va al neutro aditivo en $\mathbb{Z}$ y el neutro multiplicativo en $\mathbb{N}$ también va al correspondiente neutro multiplicativo en $\mathbb{Z}$.

Lema 4. $\gamma(0) = [(0, 0)]$.

Dem.- Se sigue directamente de la definición de γ.

$\square$

Lema 5. $\gamma(1) = [(1, 0)]$.

Dem.- Se sigue directamente de la definición de γ.

$\square$

Ahora veamos que el orden de los naturales se respeta en $\mathbb{Z}$.

Lema 6. $n < m$ si y sólo si $\gamma(n) <^* \gamma(m) \qquad \forall\ n, m \in \mathbb{N}$.

Dem.-
$$n < m \iff [(m, 0)]\ \widehat{+}\ [(0, n)] \in \mathbb{Z}^+,$$
de la definición de número positivo en $\mathbb{Z}$ y expandiendo el término en una suma. Esto equivale a decir que
$$n < m \iff [(m, 0)]\ \widehat{+}\ (-[(n, 0)]) \in \mathbb{Z}^+.$$
Finalmente, de la definición de orden en los enteros,
$$n < m \iff [(n, 0)] <^* [(m, 0)],$$
que es lo que se quería.

$\square$

Los 6 lemas que acabamos de ver, bien pueden conformar un teorema, donde cada uno de los lemas fuera un inciso:

Teorema (Inmersión de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$). Existe una función inyectiva
$$\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\text{tal que} \qquad n \mapsto [(n, 0)],$$
de los números naturales en los enteros, que respeta la suma, el producto, el neutro aditivo, el neutro multiplicativo, al igual que respeta el orden.

Dem.- Ya se hizo la demostración.

$\square$

Ahora resolvamos el ejercicio 4, de la pasada lectura del blog:

Proposición. Sean $a, c \in \mathbb{N}$ y $b, d \in \mathbb{N}$. $b + d < a + c$ si y sólo si $[(a, b)] <^* [(c, d)]$.

Dem.- Usando la definición de entero positivo en $\mathbb{Z}$ (consultar en la entrada de blog anterior),
$$b + d < a + c \iff [(a + c, b + d)] \in \mathbb{Z}^+.$$
Y, de la definición de suma en $\mathbb{Z}$ se tiene que $[(a + c, b + d)] = [(c + a, d + b)] = [(c, d)]\ \widehat{+}\ [(a, b)]$. Ya que $[(a, b)] = -[(b, a)]$, entonces
$$b + d < a + c \iff [(c, d)]\ \widehat{+}(-[(b, a)]) \in \mathbb{Z}^+.$$

La definición de orden en $\mathbb{Z}$ establece que $[(a,b)] <^* [(c,d)]$ si y sólo si $[(c,d)] \;\widehat{+}(-[(b,a)]) \in \mathbb{Z}^+$; de donde obtenemos lo que queremos:

$$b + d < a + c \iff [(a,b)] <^* [(c,d)].$$

□

La siguiente proposición es importante pues tiene como consecuencia que hay metidas dos copias de números naturales en $\mathbb{Z}$ (sin contar el cero). Es decir, hay tantos enteros positivos como naturales, y tantos enteros negativos como naturales.

Proposición. Para cualquier $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

1. $[(n,0)] \in [(a,b)]$, o
2. $[(0,n)] \in [(a,b)]$.

Dem.- Sea $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$.

Caso 1) Si $a = 0 = b$, entonces elegimos $n = 0$, y, trivialmente, $[(0,0)] \in [(0,0)]$.

Caso 3) Sea $a > b$. De la definición de orden en $\mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + k$. Queremos que $[(n,0)] \sim [(a,b)]$. Se debe cumplir pues, que $n + b = 0 + a = a$. Así, elijamos $n = k$. De este modo, $[(n,0)] = [(a,b)]$. En particular, $[(n,0)] \in [(a,b)]$.

Caso 4) Sea $b > a$. De la definición de orden en $\mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + k$. Queremos que $[(0,n)] \sim [(a,b)]$. Se debe cumplir pues, que $0 + b = n + a$. Escogemos $n = k$. De este modo, $[(0,n)] = [(a,b)]$. En particular, $[(0,n)] \in [(a,b)]$.

□

La proposición anterior es una manera de ilustrar en particular, que hay el mismo número de números naturales positivos como números enteros negativos (caso 4 de nuestra prueba), pues a cada entero $[(a,b)] \in \mathbb{Z}^-$ (es decir, a todo entero negativo) le podemos asociar una ecuación de la forma $b = a + k$, donde, eligiendo $k = n$, con $k \in \mathbb{N}$, también ello significa asociarle un número natural n a cada entero en $\mathbb{Z}^-$. Esto es una biyección, pues si tomamos que el dominio de tal función sea $\mathbb{Z}^-$, la k barre todos los naturales. Y podemos pensarlo también de manera inversa; es decir, eligiendo como dominio $\mathbb{N}$, contradominio $\mathbb{Z}^-$ y a $b = a + k$ como recla de correspondencia. Ya sabemos que todos los enteros en $\mathbb{Z}^-$ son todos de esta forma. Es decir, la función es inyectiva y suprayectiva.

Este hecho no se debe interpretar como que "la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es distinta de la cardinalidad de $\mathbb{N}$". Por el contrario, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

3. Ejercicios.

1. Demostrar que existe el mismo número de naturales que de enteros.
2. Da una biyección que muestre que el conjunto de los enteros positivos pares, $\{2, 4, 6, \ldots\}$ y el conjunto de los enteros, $\{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ tienen la misma cardinalidad.